

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

**Методические указания
для практических занятий по теме:
«ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ.
РЯДЫ ФУРЬЕ».**

по курсам «Теория электрических и электронных цепей» и
«Электричество и магнетизм»
для студентов АП факультета

Харьков
НТУ «ХПИ»
2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

Методические указания
для практических занятий по теме:
«ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ.
РЯДЫ ФУРЬЕ».

по курсам «Теория электрических и электронных цепей» и
«Электричество и магнетизм»
для студентов АП факультета

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета,
протокол №

Харьков
НТУ «ХПИ»
2015

Методические указания для практических занятий по теме: «Частотный метод анализа электрических цепей. Ряды Фурье» по курсам «Теория электрических и электронных цепей» и «Электричество и магнетизм» : для студентов АП ф-та / сост.: М. М. Резинкина, О. Л. Резинкин, Е. В. Сосина. – Харьков : НТУ “ХПИ”, 2015. – 24 с.

Составители: Резинкина М.М., Резинкин О.Л., Сосина Е.В.

Рецензент Б.И. Кубрик, канд.техн.наук, доц. каф. ТОЭ

Кафедра теоретических основ электротехники

Введение

Частотный метод является распространенным методом описания процессов в линейных электрических цепях. Данный метод предполагает разложение сигнала на гармонические функции (гармоники), имеющие различную частоту, амплитуду и начальные фазы. Набор таких функций может образовывать дискретный или непрерывный частотный спектр. В первом случае используется разложение в ряд Фурье, во втором - интегральное преобразование Фурье. **Частотным спектром сигнала** называют совокупность всех гармоник, которые в сумме дают исходный сигнал.

Сигналом называется изменяющаяся во времени физическая величина, с помощью которой передается некоторое сообщение. В роли электрического сигнала может выступать ток, напряжение, а также векторы электромагнитного поля.

Спектр периодического сигнала является дискретным, поскольку гармоники с амплитудами A_{mk} и начальными фазами ψ_k , на которые он может быть разложен, имеют частоты $k\Omega$, кратные основной частоте повторения сигнала Ω . Такое разложение сигнала производится с помощью **ряда Фурье**.

Спектр сигналов описывают графически путем построения АЧС и ФЧС.

АЧС – амплитудно-частотный спектр сигнала – представляет собой зависимость амплитуд гармоник от частоты ($k\Omega$ или kF).

ФЧС – фазочастотный спектр – представляет собой зависимость от частоты начальных фаз гармоник.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1

1.1. Частотный спектр периодического сигнала (дискретный спектр)

Представим периодический во времени сигнал $a(t)$ (см. рис. 1) в виде суммы k -ых гармоник, имеющих частоты $k\Omega$, амплитуды A_{mk} и начальные фазы ψ_k . Причем, частоты гармоник кратны частоте повторения сигнала $\Omega = 2\pi F$ (где $F=1/T$, T – период повторения сигнала). В результате получим разложение $a(t)$ в ряд Фурье:

$$a(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} \cos(k\Omega t + \psi_k), \quad (1)$$

где A_0 – амплитуда нулевой гармоники, определяющая постоянную, не зависящую от времени составляющую.

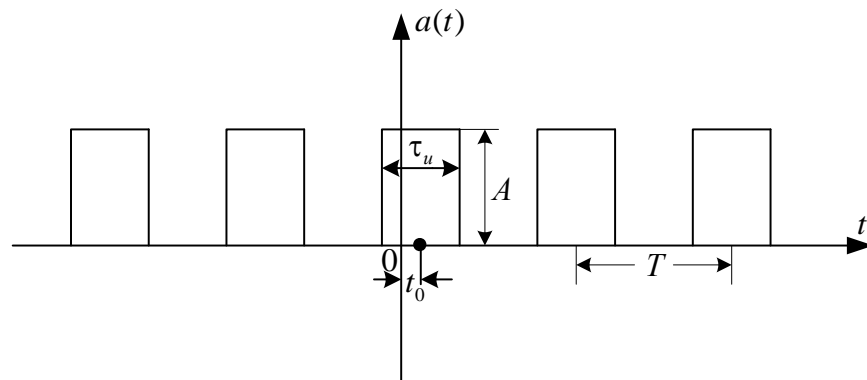


Рис. 1. – Периодическая последовательность прямоугольных импульсов, в которой начало координат соответствует середине импульса

При определенных условиях некоторые гармоники (например, четные или нечетные) в спектре сигнала могут отсутствовать.

При построении АЧС и ФЧС, когда ряд Фурье записан в виде суммы вещественных компонент (см. (1)), k -ая гармоника в спектре сигнала представляется линией при частоте $k\Omega$ (для АЧС высота этой линии равна A_{mk} , а для ФЧС – ψ_k).

Более общей является комплексная форма записи ряда Фурье, когда вещественная гармоника представляется в виде суммы двух комплексных

слагаемых с частотами $\kappa\Omega$ и $(-\kappa\Omega)$ и амплитудами:

$$\tilde{S}'_k(t) = S_{mk} e^{j(k\Omega t + \psi_k)}; \quad (2)$$

$$\tilde{S}''_k(t) = S_{mk} e^{-j(k\Omega t + \psi_k)}. \quad (3)$$

Отрицательная частота $(-\kappa\Omega)$ физического смысла не имеет и представляет формальное математическое понятие. Амплитуды комплексных гармоник (2), (3) равны половине амплитуд вещественных гармоники A_{mk} : $S_{mk} = A_{mk} / 2$. Учитывая, что при сложении (2) и (3) мнимые части сокращаются, запишем k -ую гармонику из (1) через (2) и (3) в виде:

$$\begin{aligned} a_k(t) &= A_{mk} \cos(\kappa\Omega t + \psi_k) = \frac{1}{2} A_{mk} e^{j(k\Omega t + \psi_k)} + \frac{1}{2} A_{mk} e^{-j(k\Omega t + \psi_k)} = \\ &= S_{mk} e^{j(k\Omega t + \psi_k)} + S_{mk} e^{-j(k\Omega t + \psi_k)} = \tilde{S}'_k(t) + \tilde{S}''_k(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Можно также записать (4) через комплексные амплитуды гармоник:

$$a_k(t) = \mathcal{S}_{mk} e^{jk\Omega t} + S_{mk}^* e^{-jk\Omega t},$$

где $\mathcal{S}_{mk} = S_{mk} e^{j\psi_k}$,

$$S_{mk}^* = S_{mk} e^{-j\psi_k}.$$

Для того чтобы получить выражение для $a(t)$ в более компактном виде, вводится функция $\text{sign } K$:

$$\text{sign } K = \begin{cases} 1 & \text{при } K > 0 \\ 0 & \text{при } K = 0 \\ -1 & \text{при } K < 0 \end{cases} \quad (5)$$

С учетом этого обозначения запишем (4) в виде:

$$a_k(t) = S_{mk} e^{j \cdot \text{sign } k \cdot \psi_k} e^{jk\Omega t} + S_{mk} e^{j \cdot \text{sign } k \cdot \psi_k} e^{-jk\Omega t}. \quad (6)$$

Подставив (6) в (1), получим разложение сигнала $a(t)$ через комплексные гармоники:

$$a(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} a_K(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} S_{mk} e^{j \cdot \text{sign } k \cdot \psi_k} e^{jk\Omega t} = S_0 + \sum_{\substack{K=-\infty \\ K \neq 0}}^{+\infty} S_{mk} e^{j \cdot \text{sign } k \cdot \psi_k} e^{jk\Omega t}, \quad (7)$$

где $S_0 = A_0$, $S_{mk} = \frac{1}{2} A_{mk}$.

Заменим формально в (7) индекс суммирования с k на λ . Получим из (7) выражение для S_{mk} – амплитуды k -ой гармоники, в зависимости от вида $a(t)$. Для этого умножим правую и левую части уравнения (7) на $e^{-jk\Omega t}$, где k – одно из положительных значений λ :

$$a(t) \cdot e^{-jk\Omega t} = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} S_{m\lambda} e^{j \cdot \text{sign} \lambda \cdot \psi_{\lambda}} \cdot e^{j\lambda\Omega t} \cdot e^{-jk\Omega t}. \quad (8)$$

Представим $e^{j\lambda\Omega t} \cdot e^{-jk\Omega t}$ в виде:

$$e^{j\lambda\Omega t} \cdot e^{-jk\Omega t} = e^{j(\lambda-k)\Omega t} = \cos[(\lambda-k) \cdot \Omega \cdot t] + j \sin[(\lambda-k) \cdot \Omega \cdot t]. \quad (9)$$

Подставим (9) в (8) и возьмем от обеих частей выражения (8) интегралы по времени в пределах от $-T/2$ до $T/2$, где T – период сигнала $a(t)$, равный периоду первой гармоники, двум периодам второй гармоники, трем периодам третьей гармоники и т.д. Поменяв местами операции интегрирования по времени и суммирования по гармоникам в правой части (8), получим:

$$\begin{aligned} & \int_{-T/2}^{T/2} a(t) \cdot e^{-jk\Omega t} dt = \\ & = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} S_{m\lambda} \cdot e^{j \cdot \text{sign} \lambda \cdot \psi_{\lambda}} \cdot \cos[(\lambda-k) \cdot \Omega \cdot t] + j \sin[(\lambda-k) \cdot \Omega \cdot t] dt. \end{aligned} \quad (10)$$

При интегрировании всех слагаемых в правой части (10), для которых $\lambda \neq k$, за целое число периодов, получаем нули вследствие того, что площади положительных и отрицательных полувольт складываются и взаимно уничтожаются. В результате в правой части (10) остается только одно слагаемое, соответствующее гармонике $(\lambda-k)=0$. При $\lambda=k$ (9) имеет вид $e^{j0\Omega t} = 1$, а значит интеграл от этой гармоники в пределах от $-T/2$ до $T/2$ нулю не равен. Тогда с учетом того, что $k > 0$ и $\text{sign } k = +1$, правую часть (10) запишем в виде единственной оставшейся k -ой гармоники:

$$\int_{-T/2}^{T/2} S_{mk} e^{j\psi_k} dt = S_{mk} e^{j\psi_k} \int_{-T/2}^{T/2} dt = S_{mk} e^{j\psi_k} T = \mathcal{S}_{mk} T.$$

где $\mathcal{S}_{mk} = S_{mk} e^{j\psi_k}$ – комплексная амплитуда k -ой гармоники.

Перепишем (10) в виде, учитывая, что его правая часть имеет вид последнего выражения:

$$\int_{-T/2}^{T/2} a(t) \cdot e^{-jk\Omega t} dt = \mathcal{S}_{mk} T.$$

Из данного уравнения получим формулу для комплексной амплитуды k -ой гармоники:

$$\mathcal{S}_{mk} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} a(t) e^{-jk\Omega t} dt. \quad (11)$$

1.2 Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

Периодическая последовательность прямоугольных импульсов показана на рис. 1. Будем полагать, что смещение во времени отсутствует: $t_0=0$. Для спектра периодической последовательности импульсов вводится такая характеристика как **скважность**:

$$q = \frac{T}{\tau_u}. \quad (12)$$

Используем переход от спектральной плотности одиночного импульса к комплексным амплитудам гармоник периодической последовательности таких же импульсов:

$$\mathcal{S}_{mk} \rightarrow \frac{1}{T} S(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow k\Omega},$$

а также выражение для спектральной плотности прямоугольного импульса:

$$S(j\omega) = A\tau_u \frac{\sin \frac{\omega\tau_u}{2}}{\frac{\omega\tau_u}{2}}. \quad (13)$$

В результате получим:

$$\mathcal{S}_{mk} = \frac{A\tau_u}{T} \cdot \frac{\sin \frac{\kappa\Omega\tau_u}{2}}{\frac{\kappa\Omega\tau_u}{2}}.$$

Запишем аргумент последнего выражения через скважность (см. (12)):

$$\frac{\kappa\Omega\tau_u}{2} = \frac{k2\pi F\tau_u}{2} = k\pi \frac{\tau_u}{T} = \frac{\kappa\pi}{q}.$$

Тогда:

$$\mathcal{S}_{mk} = \frac{A}{q} \cdot \frac{\sin \frac{\kappa\pi}{q}}{\frac{\kappa\pi}{q}} = \frac{A}{q} \cdot \frac{\sin x}{x}, \quad (14)$$

где $x = \frac{\kappa\pi}{q}$.

Хотя частотный спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов подобен частотному спектру одиночного прямоугольного импульса (см. (14) и (13)), между этими спектрами имеется существенное различие. Так, в первом спектре аргумент $x = \omega\tau_u / 2$ является непрерывной функцией частоты, а во втором - аргумент $x = \kappa\pi / q$ ($\kappa=0, 1, 2, 3, \dots$) является дискретной функцией частоты. Первый спектр определяется спектральной плотностью $S(j\omega)$, второй – дискретным набором комплексных гармоник \mathcal{S}_{mk} .

В случае дискретного спектра для построения его АЧС и ФЧС используется огибающие, определяемые выражениями $\frac{A}{q} \cdot \frac{|\sin x|}{x}$ (АЧС) и $\psi(\omega) = (n-1)\pi \pm \omega t_0$ (ФЧС). Данные огибающие ограничивают отрезки,

которые соответствуют амплитудам гармоник S_{mk} (для АЧС) и начальным фазам ψ_k (для ФЧС). Огибающие обычно изображают пунктиром, а отрезки S_{mk} и ψ_k - сплошными линиями.

Первое значение частоты, при котором график АЧС проходит через ноль (граница первого лепестка), определяется равенством $\kappa_{01}\pi/q = \pi$, откуда $\kappa_{01} = q$, $f_{01} = qF$ (где F – частота повторения импульсов). Подставляя в f_{01} вместо q его выражение (12), получим: $f_{01} = 1/\tau_u$ [Гц], $k_{02} = 2q$, $f_{02} = 2/\tau_u$, При сдвиге середины импульса вправо или влево на t_0 к зависимости огибающей ФЧС прибавляется $(-\omega t_0)$ или $(+\omega t_0)$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2

2.1 Мощность периодического сигнала. Ширина дискретного спектра

Выражение для мощности сигнала получим с помощью равенства, которое называется **равенством Парсеваля или Ляпунова-Парсеваля** или обобщенной формулой **Рэлея**. Это равенство представляет собой аналог теоремы Пифагора в векторных пространствах. По отношению к преобразованию Фурье оно означает, что сумма (или интеграл) квадрата оригинала равна сумме (или интегралу) квадратов изображений.

Если $a(t)$ является квадратично интегрируемой функцией в интервале $[-T/2, T/2]$ и выражается в виде ряда Фурье (см. (7)), то для ряда Фурье имеет место равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [a(t)]^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_{mk}^2. \quad (15)$$

Для последовательности прямоугольных импульсов высотой A левая часть (15) равняется A^2 . Представим правую часть (15) в виде суммы квадратов нулевой гармоники ($S_0=A_0$) и квадратов половин амплитуд основных гармоник ($S_{mk} = \frac{1}{2} A_{mk}$). Заменим нижний предел суммирования на

1, домножив сумму на 2, в результате получим:

$$A^2 = A_0^2 + 2 \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{A_{m\kappa}}{2}\right)^2. \quad (16)$$

Используя замену $A_{m\kappa} = \sqrt{2}A_{\kappa}$ (где A_{κ} - действующее значение), получим:

$$A^2 = A_0^2 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_{\kappa}^2.$$

Тогда

$$A = \sqrt{A_0^2 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_{\kappa}^2}. \quad (17)$$

Пусть сигнал представляет собой ток в сопротивлении R . Тогда согласно (17) мощность сигнала:

$$P = RI^2 = RI_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} RI_k^2.$$

Если число учитываемых гармоник равно n , то

$$P = RI_0^2 + \sum_{k=1}^n RI_k^2 = P_0 + \sum_{k=1}^n P_{\kappa}. \quad (18)$$

Таким образом, активную мощность периодического сигнала можно представить в виде суммы мощностей его гармонических составляющих, включая нулевую.

Шириной дискретного спектра периодического сигнала называется область частот, в пределах которой сосредоточена определенная доля всей мощности сигнала.

С помощью интегрирования спектра сигнала по интервалам лепестков можно показать, что в случае периодической последовательности прямоугольных импульсов 90.2 % мощности сигнала сосредоточено в первом лепестке, 95% - в пределах первого и второго, 96.7 % - в пределах первых трех и т.д. Таким образом, ширина частотного спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов при учете примерно 90 %

мощности сигнала равна: $\Delta f_c = 1/\tau_u$ или $\Delta \omega_c = 2\pi/\tau_u$.

2.2 Частотный спектр радиоимпульса

Будем полагать, что видеоимпульс представляет собой функцию полезного сигнала (низкочастотного), а радиоимпульс - это высокочастотное несущее, модулированное полезным сигналом колебание, т.е. если видеоимпульс - это $f(t)$, то радиоимпульс - это $f(t) \cdot \cos(\omega t)$. Найдем по заданному частотному спектру видеоимпульса частотный спектр радиоимпульса, огибающей которого является видеоимпульс. На рис. 2 показан радиоимпульс с огибающей в виде прямоугольника (видеоимпульса). Причем, имеющее место условие $\tau_u \gg T_0$ на рисунке не соблюдено.

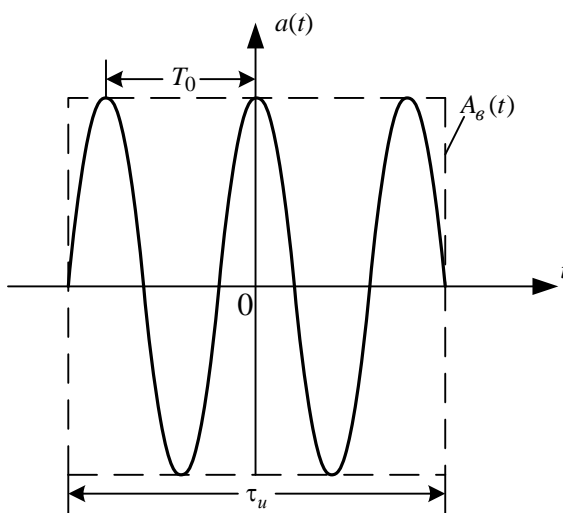


Рис. 2 – Прямоугольный радиоимпульс

Будем обозначать видеоимпульс индексом «в» (например, $A_g(t)$), а радиоимпульс - индексом «р» (например, $A_p(t) = a(t)$):

$$a(t) = A_g(t) \cos \omega_0 t. \quad (19)$$

Полагая, что начальная фаза высокочастотного колебания равна нулю, перейдем к изображениям по Фурье:

$$A_g(t) \xrightarrow{F} S_g(j\omega); \quad (20)$$

$$a(t) \xrightarrow{F} S_p(j\omega), \quad (21)$$

где $S_e(j\omega)$ - спектральная плотность видеоимпульса; $S_p(j\omega)$ спектральная плотность радиоимпульса.

Представим в (19) косинус в виде суммы комплексных экспонент:

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}.$$

Тогда

$$a(t) = \frac{1}{2} A_e(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} A_e(t) e^{-j\omega_0 t}.$$

В соответствии с теоремой смещения

$$A_e(t) e^{\pm j\omega_0 t} \xrightarrow{F} S_e[j(\omega \mp \omega_0)].$$

В результате, изображение по Фурье (19) получим в виде:

$$S_p(j\omega) = \frac{1}{2} S_e[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} S_e[j(\omega + \omega_0)]. \quad (22)$$

Таким образом, частотный спектр радиоимпульса можно представить в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых является уменьшенным в два раза частотным спектром видеоимпульса (оггибающей). Причем, первое слагаемое сдвинуто по оси частот на ω_0 влево, а второе - на ω_0 вправо.

АЧС прямоугольного радиоимпульса, изображенного на рис. 2, показан на рис. 3. При этом пунктир на оси частот указывает на тот факт, что $\tau_u \gg T_0$ и $\omega_0 \gg 1/\tau_u$.

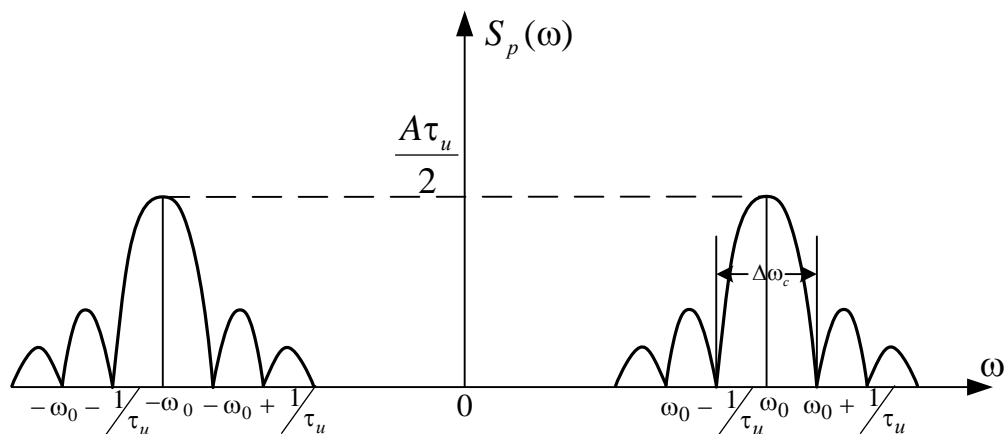


Рис. 3 – Частотный спектр (АЧС) прямоугольного радиоимпульса.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3

3.1 Частотный метод анализа прохождения электрического сигнала через линейную электрическую цепь

Для определения спектра выходного сигнала по спектру входного сигнала в зависимости от частотных характеристик цепи в случае сигнала с дискретным спектром для каждой его гармоники может быть использовано соотношение:

$$\mathbf{Y}_{mk} = K(jk\Omega) \cdot \mathbf{X}_{mk} \quad \text{или} \quad \mathbf{Y}_k = K(jk\Omega) \cdot \mathbf{X}_k, \quad (23)$$

где \mathbf{Y}_{mk} , \mathbf{X}_{mk} , \mathbf{Y}_k , \mathbf{X}_k – комплексные амплитуды и комплексные действующие значения выходного и входного сигналов; $K(jk\Omega)$ – комплексный коэффициент передачи для k -ой гармоники.

При использовании показательной форме записи, запишем (23) в виде:

$$Y_k e^{j\psi_{Yk}} = K(k\Omega) e^{j\varphi_k} \cdot X_k e^{j\psi_{Xk}}. \quad (24)$$

Откуда модуль выходного сигнала:

$$Y_k = K(k\Omega) \cdot X_k, \quad (25)$$

а его фаза:

$$\psi_{Yk} = \varphi_k + \psi_{Xk}. \quad (26)$$

Для сплошного спектра можно записать аналогичные выражения:

$$Y(j\omega) = K(j\omega) \cdot X(j\omega); \quad (27)$$

$$Y(\omega) e^{j\psi_Y(\omega)} = K(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \cdot X(\omega) e^{j\psi_X(\omega)}; \quad (28)$$

$$Y(\omega) = K(\omega) \cdot X(\omega); \quad (29)$$

$$\psi_Y(\omega) = \varphi(\omega) + \psi_X(\omega). \quad (30)$$

Соотношения (23) и (27) имеют следующий смысл: частотный спектр выходного сигнала равен комплексной передаточной функции, умноженной на частотный спектр входного сигнала. Причем, для дискретного спектра соотношения вида (24) записываются для каждой из гармоник.

Алгоритм частотного анализа можно представить в виде:

1. По заданному сигналу $X(t)$ определяются комплексные амплитуды

гармоник. Для дискретного спектра:

$$S_{mk} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t) e^{-jk\Omega t} dt,$$

для сплошного спектра:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt.$$

2. Определяется комплексная передаточная функция цепи. Это $K(j\omega)$ в случае сплошного спектра. В случае дискретного спектра по $K(j\omega)$ определяется набор комплексных коэффициентов передачи для каждой гармоники.

3. По спектру входного сигнала и комплексной передаточной функции определяется спектр выходного сигнала (для дискретного спектра – по (23), для сплошного – по (27)).

ЗАДАЧИ.

Задача 1.

Построить АЧС и ФЧС периодического сигнала

$$a(t) = 10 + 4 \cos(62800 \cdot t + \pi/4) + 6 \cos(2 \cdot 62800 \cdot t - \pi/3) - 8 \cos(3 \cdot 62800 \cdot t + \pi/6)$$

Решение.

Сигнал имеет дискретный спектр, который содержит четыре гармоники. Это нулевая гармоника с амплитудой $A_0=10$, первая гармоника с амплитудой и фазой $A_{m1}=4$, $\psi_1=\pi/4$, вторая гармоника с амплитудой и фазой $A_{m2}=6$, $\psi_2=-\pi/3$ и третья гармоника с амплитудой и фазой $A_{m3}=8$, $\psi_3=\pi/6$. Период повторения сигнала – $F=10000$ Гц=10 кГц.

При вещественной форме записи ряда Фурье получим АЧС и ФЧС, показанные на рис. 4. Причем, АЧС содержит четыре спектральные линии, а ФЧС – три, поскольку постоянная составляющая от времени не зависит.

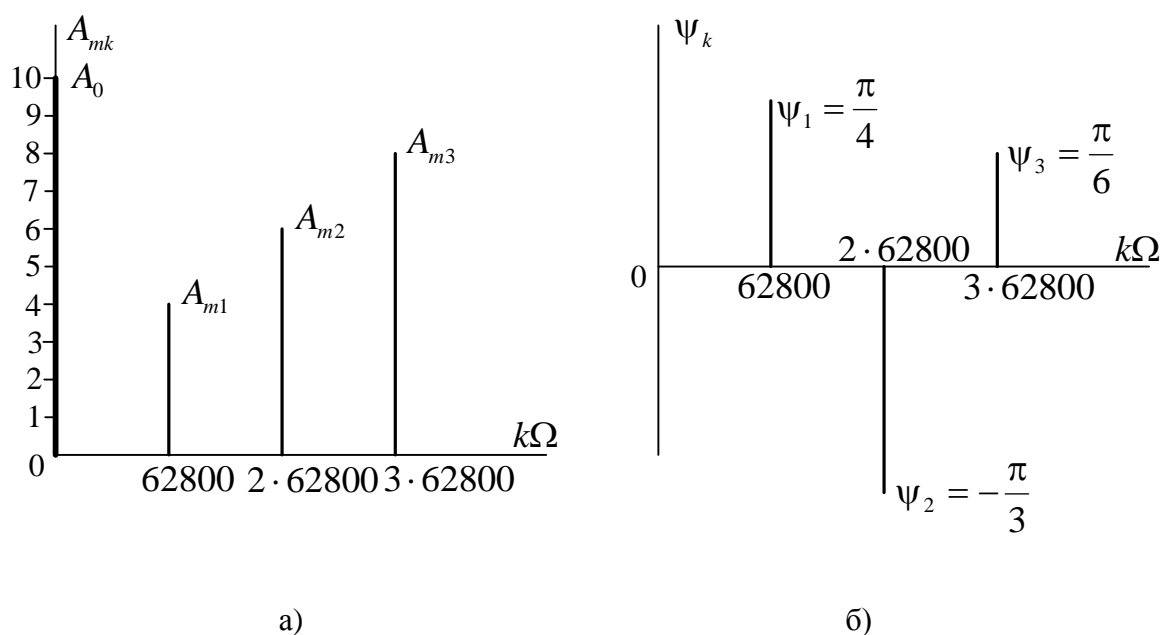
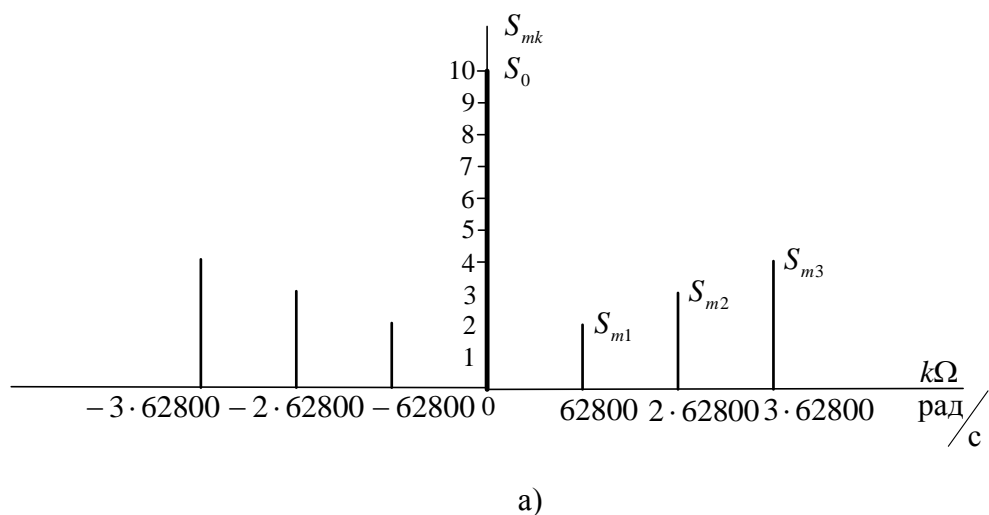
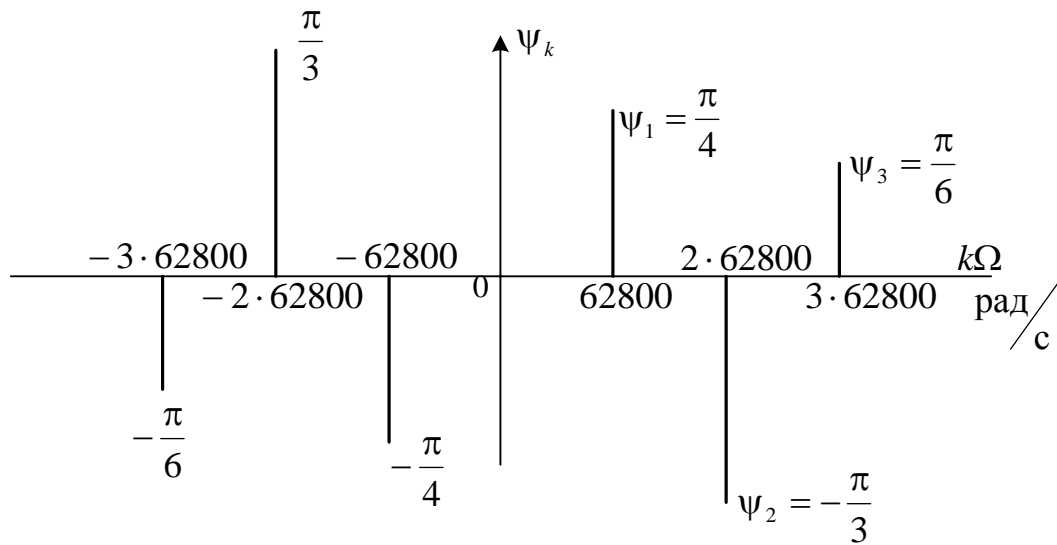


Рис. 4 – АЧС (а) и ФЧС (б), соответствующие вещественной форме записи ряда Фурье

Спектр этого сигнала для комплексной формы ряда Фурье (см. рис. 5) представляется в виде суммы двух составляющих на частотах $k\Omega$ и $-k\Omega$. Число линий АЧС и ФЧС, кроме линии нулевой гармоники, удваивается, поскольку каждой линии на частоте $k\Omega$ соответствует дополнительная линия на частоте $(-k\Omega)$. Амплитуды всех гармоник, кроме 0-ой, которая не меняется, уменьшаются вдвое, но их величины одинаковы для отрицательных и положительных частот, поэтому АЧС – четная функция частоты. Линии ФЧС при отрицательных частотах меняют знак, а по величине не меняются, поэтому ФЧС – нечетная функция частоты.





б)

Рис. 5 – АЧС (а) и ФЧС (б), соответствующие комплексной форме записи ряда Фурье

Задача 2.

Получить спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов, показанных на рис. 1.

Решение.

Положим вначале, что $t_0=0$. Подставим $a(t)$ в формулу для комплексной амплитуды k -ой гармоники периодического сигнала и используем понятие скважности $q = T / \tau_u$, получим:

$$\begin{aligned} S_{mk} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} a(t) e^{-jk\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2} A e^{-jk\Omega t} dt = \frac{A}{T(-jk\Omega)} e^{-jk\Omega t} \Bigg|_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2} = \\ &= -\frac{A}{jTk2\pi F} (e^{-jk\Omega \frac{\tau_u}{2}} - e^{jk\Omega \frac{\tau_u}{2}}) = \\ &= -\frac{A}{jk2\pi} (-j2 \sin k\Omega \frac{\tau_u}{2}) = \frac{A}{k\pi} \sin k2\pi F \frac{\tau_u}{2} = \frac{A}{k\pi} \sin k\pi \frac{\tau_u}{T} = \frac{A}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{q}, \end{aligned}$$

где $F = 1/T$ - частота сигнала; $\Omega = 2\pi F$ - круговая частота.

Перепишем последнее выражение в виде:

$$\mathcal{S}_{mk} = \frac{A}{q} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

где $\alpha = k\pi/q$.

По теореме запаздывания

$$a(t \mu t_0) \xrightarrow{F} S(j\omega) \cdot e^{j\omega t_0}.$$

Таким образом, модуль изображения функции $a(t - t_0)$ такой же как у изображения функции $a(t)$, а к ее фазе нужно прибавить $(-t_0\omega)$: $\varphi(\omega) = (n-1)\pi - t_0\omega$.

Задача 3.

Получить спектральную плотность одиночного прямоугольного импульса $S(j\omega)$ через \mathcal{S}_{mk} - комплексные амплитуды гармоник периодической последовательности таких же импульсов. После этого выполнить обратное преобразование от \mathcal{S}_{mk} к $S(j\omega)$.

Решение.

Полученное в задаче 2 решение для комплексных гармоник прямоугольного импульса можно записать в виде:

$$\mathcal{S}_{mk} = \frac{A\tau_u}{T} \cdot \frac{\sin k\pi F\tau_u}{k\pi F\tau_u} = \frac{A\tau_u}{T} \cdot \frac{\sin \frac{k\Omega\tau_u}{2}}{\frac{k\Omega\tau_u}{2}}.$$

Используя соответствие между комплексными амплитудами гармоник периодической последовательности импульсов \mathcal{S}_{mk} и спектральной плотностью таких же одиночных импульсов $S(j\omega)$, получим спектральную плотность одиночного импульса:

$$S(j\omega) = T \mathcal{S}_{mk} \Big|_{k\Omega \rightarrow \omega} = T \frac{A\tau_u}{T} \cdot \frac{\sin \frac{\omega\tau_u}{2}}{\frac{\omega\tau_u}{2}} = A\tau_u \frac{\sin \frac{\omega\tau_u}{2}}{\frac{\omega\tau_u}{2}}.$$

Выполним обратный переход от $S(j\omega)$ к \mathcal{S}_{mk} :

$$\begin{aligned} S_{mk} &\rightarrow \frac{1}{T} S(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow k\Omega} = \frac{1}{T} A \tau_u \frac{\sin \frac{k\Omega \tau_u}{2}}{\frac{k\Omega \tau_u}{2}} = \frac{A}{q} \cdot \frac{\sin \frac{k2\pi F \tau_u}{2}}{\frac{k2\pi F \tau_u}{2}} = \frac{A}{q} \cdot \frac{\sin \frac{k\pi \tau_u}{T}}{\frac{k\pi \tau_u}{T}} = \\ &= \frac{A}{q} \cdot \frac{\sin \frac{k\pi}{q}}{\frac{k\pi}{q}}. \end{aligned}$$

Задача 4.

Построить АЧС и ФЧС периодической последовательности прямоугольных импульсов (см. рис. 1), если $A=10$ В, $\tau_u=50$ мкс, $t_0=20$ мкс, $T=200$ мкс.

Решение.

$$\text{Сквозность: } q = \frac{T}{\tau_u} = \frac{200}{50} = 4,$$

$$\frac{A}{q} = \frac{10}{4} = 2.5 \text{ В}, \quad F = \frac{1}{T} = \frac{1}{200 \cdot 10^{-6}} = 5 \cdot 10^3 \text{ Гц} = 5 \text{ кГц}.$$

Первая нулевая точка АЧС будет при $k = q = 4$.

$$f_{01} = qF = 4 \cdot 5 = 20 \text{ кГц} \text{ или } f_{01} = \frac{1}{\tau_u} = \frac{1}{50 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^4 \text{ Гц} = 20 \text{ кГц}.$$

$$-\omega t_0 = -t_0 2\pi f = 20 \cdot 10^{-6} 2\pi f = -2 \cdot 10^{-5} 2\pi f, \text{ где } f \text{ в Гц,}$$

$$-\omega t_0 = -2 \cdot 10^{-2} 2\pi f, \text{ где } f \text{ в кГц.}$$

Огибающая АЧС:

$$\frac{A}{q} \cdot \frac{\left| \sin(k\Omega \frac{\tau_u}{2}) \right|}{k\Omega \frac{\tau_u}{2}} = 2.5 \cdot \frac{|\sin x|}{x},$$

$$\text{где } x = k\Omega \frac{\tau_u}{2} = kF2\pi \frac{\tau_u}{2} = kF\pi \tau_u \xrightarrow{kF \rightarrow f} f\pi \tau_u.$$

Значения комплексных гармоник АЧС:

$$S_{mk} = \frac{A}{q} \cdot \frac{|\sin x|}{x} = 2.5 \cdot \frac{|\sin(k\pi/4)|}{k\pi/4},$$

$$\text{где } x = k\Omega \frac{\tau_u}{2} = k2\pi F \frac{\tau_u}{2} = k\pi F \tau_u = k\pi \frac{\tau_u}{T} = \frac{k\pi}{T/\tau_u} = k\pi/q = k\pi/4.$$

Огибающая ФЧС строится из следующих соображений. При отсутствии смещения центра сигнала относительно временной оси ($t_0=0$) фазы гармоник, в виде которых представлен исходный сигнал, равны нулю, когда $\sin x > 0$ (соответствует нечетным n), и π , когда $\sin x < 0$ (соответствует четным n). Слагаемое $2\pi n$ отбрасывается. Окончательно получим:

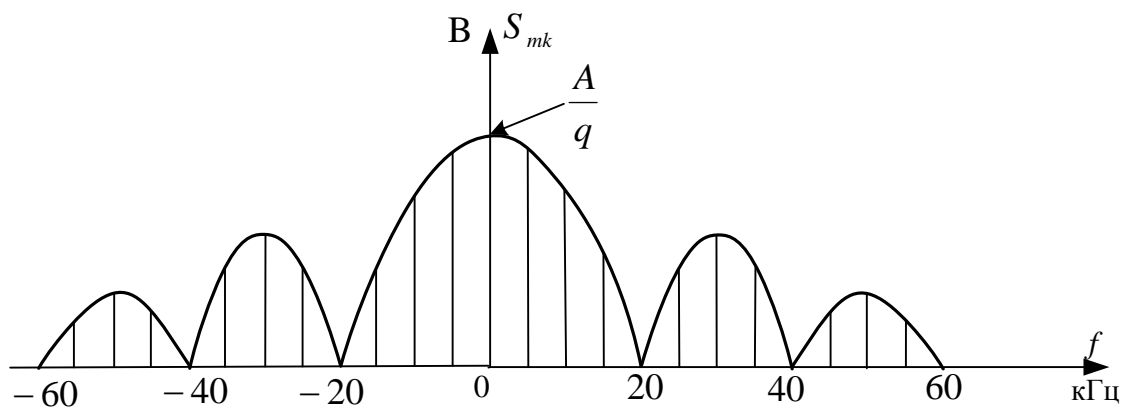
$$\psi(\omega) = (n-1)\pi,$$

где n – номер лепестка, причем в области отрицательных частот n принимает отрицательные значения: -1, -2,

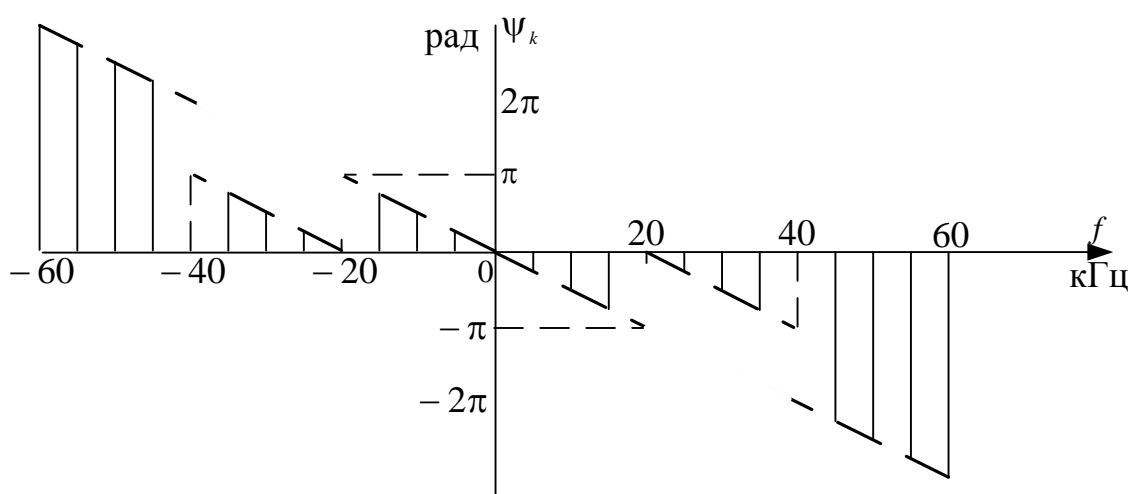
Если $t_0 \neq 0$, то согласно теореме запаздывания, сдвигу оригинала во времени на t_0 соответствует домножение спектральной плотности на множитель $e^{j\omega t_0}$. Причем, сдвиг вправо соответствует множителю $e^{-j\omega t_0}$ (функция $a(t-t_0)$), сдвиг влево - множителю $e^{j\omega t_0}$ (функция $a(t+t_0)$). При таких сдвигах модуль спектральной плотности, а значит и АЧС, не меняется, а к ее аргументу добавляется слагаемое $\mu \omega t_0 = \mu 2\pi t_0 f$. В нашем случае имеет место сдвиг вправо (см. рис. 1), поэтому ФЧС запишем в виде:

$$\psi(\omega) = (n-1)\pi - \omega t_0 = (n-1)\pi - \omega \cdot 2 \cdot 10^{-5}.$$

С помощью графиков огибающих АЧС и ФЧС можно построить отрезки S_{mk} и ψ_k , соответствующие дискретным гармоникам. Поскольку в нашем примере скважность равна 4, в каждом лепестке укладывается четыре отрезка основной частоты $F=5$ кГц. Причем, на границах лепестков (при частотах, соответствующих нулевым точкам АЧС) амплитуды соответствующих гармоник ($k=4, 8, 12$ и т.д.) равны нулю. Поэтому во всех лепестках, кроме первого, содержащего дополнительную нулевую гармонику, будет три гармоники. АЧС и ФЧС для этой задачи приведены на рис. 6.



а)



б)

Рис. 6 – АЧС (а) и ФЧС (б) периодической последовательности прямоугольных импульсов

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Ч. 1. – М.: Энергия, 1975. – 536 с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи. – М.: Высшая школа, 1984. – 559 с.
3. Колобков Д.С. Частотные спектры сигналов. Учебное пособие. Харьков, УЗПИ, 1985, 103 с.
4. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Учебник для вузов. - М.: Высшая школа, 1988.
5. Васильев Д.В. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебное пособие для вузов. - М.: Радио и связь, 1982. - 528 с.
6. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. - М.: Мир, 1983.
7. Глебович Г.В. Переходные процессы и основы синтеза линейных радиотехнических цепей. Лекции по курсу "Основы теории цепей". Горький – 1968.

СОДЕРЖАНИЕ:

Введение.....	3
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1.....	4
1.1 Частотный спектр периодического сигнала (дискретный спектр).....	4
1.2 Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов.....	7
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2.....	9
2.1 Мощность периодического сигнала. Ширина дискретного спектра..	9
2.2 Частотный спектр радиоимпульса.....	11
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3.....	13
3.1 Частотный метод анализа прохождения электрического сигнала через линейную электрическую цепь.....	13
ЗАДАЧИ.....	14
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	21

Навчальне видання

Методичні вказівки

для практичних занять за темою:

«ЧАСТОТНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ.
РЯДИ ФУР'Є».

за курсами «Теорія електричних та електронних кіл» та

«Електрика і магнетизм»

для студентів АП факультету

Російською мовою

Укладачі: Резинкіна М.М., Резинкін О.Л., Сосіна О.В.

Відповідальний за випуск: Сосіна О.В.

Роботу до видання рекомендував А.М. Борисенко

В авторській редакції

План 2015р, поз.1

Підп. До друку 2015р. Формат 60х84 1/16. Папір офсетний.

Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк арк. Наклад 55 прим.

Зам № . Ціна договірна.

Віддруковано ФОП Андреев К.В.

61166, Харків, просп. Леніна, 14, тел. 757-63-27

Свідоцтво про державну реєстрацію №24800170000045020 від 30.05.2003